Hamilton-Mechanik im erweiterten Phasenraum

Jürgen Struckmeier*

Erweiterte Version der Antrittsvorlesung, gehalten am 14. Mai 2003 im Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

„Denn wiewohl wir nur wenig von dieser Welt Vollkommenheit ausspähen oder erreichen werden, so gehört es doch zur Gesetzgebung unserer Vernunft, sie allwärts zu suchen und zu vermuten, und es muß uns jederzeit vorteilhaft sein, niemals aber kann es nachteilig werden, nach diesem Prinzip die Naturbetrachtung anzustellen".

(aus: Immanuel Kant, Kritik der reinen Vernunft)

Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist in Wesen und Tragweite eines der erstaunlichsten Gesetze der Physik. In seiner Hamiltonschen Formulierung besagt jenes Prinzip, daß unter allen *denkbaren* Wegen, die ein dynamisches System beim Übergang von einem Zustand zum Zeitpunkt t_1 in einen des Zeitpunkts t_2 durchlaufen könnte, genau derjenige Weg *tatsächlich* beschritten wird, bei welchem das *Zeitintegral über die Differenz von kinetischer und potentieller Energie* — also einer Wirkung — einen Minimalwert annimmt. Wie wir heute wissen, erstreckt sich die Gültigkeit dieses Prinzips weit über den Bereich der mechanischen Erscheinungen hinaus und scheint alle reversiblen Vorgänge der Physik zu beherrschen. In diesem Sinne verkörpert das Prinzip somit das Idealziel der modernen Physik, ein möglichst breites Spektrum von Naturerscheinungen aus möglichst wenigen Grundprinzipien zu erklären. In den Worten Max Plancks [1] ist „gegenwärtig das Prinzip der kleinsten Wirkung wohl dasjenige, welches nach Form und Inhalt den Anspruch erheben darf, jenem idealen Endziel der theoretischen Forschung am nächsten zu kommen".

Mathematisch formuliert wird das Prinzip mit den n-Komponenten-Vektoren der generalisierten Koordinaten $\vec{q}$, $\vec{p}$ und der Hamiltonfunktion $H(\vec{q},\vec{p},t)$ des betrachteten Systems als das Variationsproblem

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{p}(t)\,\frac{d\vec{q}(t)}{dt} - H\big(\vec{q}(t),\vec{p}(t),t\big) \right] dt \overset{!}{=} 0\,. \tag{1}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Zustand des vorliegenden dynamischen Systems an den Zeitpunkten t_1 und t_2, welche die Integrationsgrenzen definieren, bekannt und somit festgelegt ist. Dem Prinzip der kleinsten Wirkung entsprechend ist der Weg $(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$, auf dem das System vom Zustand des Zeitpunkts t_1 in denjenigen des Zeitpunkts t_2 gelangt, genau dadurch bestimmt, daß die Variation des Integrals in Gl. (1) verschwindet. Mit den Techniken der Variationsrechnung — und dies wird in jedem Lehrbuch der theoretischen Mechanik (siehe z.B. [2, 3, 4]) vorgeführt — läßt sich zeigen, daß das Variationsintegral genau dann wie gefordert verschwindet, wenn der beschrittene Weg die „kanonischen Gleichungen" erfüllt

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\,, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}\,. \tag{2}$$

Die Lösung dieses i.a. gekoppelten Systems von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmt dann vollständig und eindeutig denjenigen Weg, der den vom Prinzip der kleinsten Wirkung geforderten Extremalwert darstellt — und welcher vom System auch tatsächlich beschritten wird.

Das Prinzips der kleinsten Wirkung bildet auch die Grundlage der Theorie der „kanonischen Transformationen". Transformationen der abhängigen Variablen $\vec{q}(t) \mapsto \vec{q}\,'(t)$ und $\vec{p}(t) \mapsto \vec{p}\,'(t)$ werden „kanonisch" genannt, wenn diese das Integral (1) invariant lassen

$$\begin{aligned} &\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{p}\,\frac{d\vec{q}}{dt} - H\big(\vec{q},\vec{p},t\big) \right] dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{p}\,'\,\frac{d\vec{q}\,'}{dt} - H'\big(\vec{q}\,',\vec{p}\,',t\big) \right] dt\,. \end{aligned} \tag{3}$$

*Priv.-Doz. Dr. Jürgen Struckmeier, Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI), Planckstraße 1, D-64291 Darmstadt; Institut für Angewandte Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Max-von-Laue-Str. 1, D-60438 Frankfurt am Main

Als offensichtliche Folge dieser Invarianz bleiben dann auch die kanonischen Gleichungen (2) in ihrer Form in den gestrichenen Koordinaten erhalten. Anschaulich bedeutet dies, daß wir in der Beschreibung eines gegebenen physikalischen Systems nicht auf einen bestimmten Satz von Koordinaten festgelegt sind, sondern uns unter der Bedingung (3) auch einen neuen wählen dürfen, der unseren jeweiligen Bedürfnissen besser entspricht. Eine weitere Bedeutung erhalten die kanonischen Transformationen für den Fall, daß H und H' *unterschiedliche* physikalische Systeme beschreiben, deren Korrelation durch die kanonische Transformation definiert wird. Auf diese Weise ist es bisweilen möglich, die Lösung der Bewegungsgleichung eines *gegebenen* Systems zu bestimmen, indem wir sie als *kanonisch transformierte Lösung des anderen, bereits gelösten Systems* darstellen.

Es scheint, als könnten wir an dieser Stelle unsere grundsätzlichen Überlegungen beenden. Bei näherer Betrachtung des Variationsproblems (1) zeigt sich jedoch, daß dieses nicht in voller Allgemeinheit formuliert wurde: die Zeit t erscheint in *zweifachem* Zusammenhang, nämlich einerseits als unabhängige Variable im Argument der Hamiltonfunktion H, sowie andererseits als formale Integrationsvariable. Infolgedessen wird die Zeit t bei der Variation des Integrals in Gl. (1) *nicht* mitvariiert. Diese Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung steht somit noch ganz in der Tradition des Newtonschen Weltbildes einer *absoluten Zeit* als dem natürlichen Evolutionsparameter eines jeden Systems, welche unberührt und unabhängig von Naturerscheinungen gleichförmig dahinfließt. Auch die modernsten Lehrbücher der klassischen Dynamik [4, 5] präsentieren die kanonische Transformationstheorie ausgehend von dieser konventionellen Form.

Diese beschränkte Allgemeinheit hat jedoch einen gewichtigen Nachteil: die auf der Grundlage von Gl. (1) entwickelte kanonische Transformationstheorie liefert mit der Bedingung (3) nur eine *Untermenge* aller möglichen kanonischen Transformationen. Eine Folge dieses Mangels der Theorie war beispielsweise, daß die analytische Untersuchung eines so einfachen Systems, wie dem des zeitabhängigen harmonischen Oszillators, lange Zeit unlösbare Schwierigkeiten bereitete. Wie wir sehen werden, gelingt es nur mit einer *allgemeineren* Formulierung der kanonischen Transformationstheorie, dieses explizit zeitabhängige Hamiltonsystem direkt in ein zeitunabhängiges abzubilden. Dessen Lösung führt dann mittels Rücktransformation sofort zu einer Lösung des Ausgangssystems. Zwar wurde schon früh die Verallgemeinerung der kanonischen Transformationstheorie angedeutet [6], diese jedoch bis heute in keinem Lehrbuch konsequent dargestellt. Wie diese Lücke zu schließen wäre, soll im folgenden skizziert werden.

Verallgemeinerte Darstellung des Variationsintegrals

Eine verallgemeinerte Darstellung von Gl. (1) erhalten wir, indem wir die Zeit t im Argument der Hamiltonfunktion von der formalen Integrationsvariablen trennen. Bezeichnen wir die neue Integrationsvariable mit s, so ergibt sich nach der Substitutionsregel der Integralrechnung unmittelbar aus Gl. (1)

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left[\vec{p}(s) \frac{d\vec{q}(s)}{ds} - H\big(\vec{q}(s), \vec{p}(s), t(s)\big) \frac{dt(s)}{ds} \right] ds \stackrel{!}{=} 0 \,. \tag{4}$$

Mit $t = t(s)$ erhalten wir somit eine — zunächst noch nicht festgelegte — *Parametrisierung der Zeit*. In dieser Beschreibung hängen nun alle kanonischen Variablen $\vec{q}(s)$, $\vec{p}(s)$, sowie die Zeit $t(s)$, von s als dem neuen *Evolutionsparameter* des Systems ab.

Die symmetrische Form des Integranden von Gl. (4) legt es nun nahe, die Zeit $t(s)$ zusammen mit dem negativen *Funktionswert* $-E(s)$ der Hamiltonfunktion H

$$E(s) = H\big(\vec{q}(s), \vec{p}(s), t(s)\big) \tag{5}$$

als zusätzliches Paar $(t(s), -h(s))$ kanonisch konjugierter Variabler zu betrachten. Formal können wir dann die „erweiterten" Vektoren $\vec{q}_1(s)$ und $\vec{p}_1(s)$ der kanonischen Variablen definieren

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ t \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ -E \end{pmatrix}.$$

Zusammengenommen bilden diese Variablen dann die *Koordinaten* eines um zwei Dimensionen „erweiterten Phasenraums". Um nun das Variationsintegral in der Form von Gl. (4) in die ursprüngliche von Gl. (1) zu überführen, brauchen wir jetzt nur noch die „erweiterte" Hamiltonfunktion H_1 einzuführen:

$$H_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1) \equiv \Big[H(\vec{q}, \vec{p}, t) - E \Big] \frac{dt}{ds} \,. \tag{6}$$

Da die in Gl. (6) enthaltene Größe E für den *Wert* der Hamiltonfunktion H steht, ergibt sich die erweiterte Hamiltonfunktion H_1 als die *implizite Funktion*

$H_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1) = 0$. Die erweiterte Hamiltonfunktion definiert folglich eine $(2n+1)$-dimensionale Hyperfläche im erweiterten Phasenraum, auf welcher die Systembewegung stattfindet — ganz analog zur $(2n-1)$-dimensionalen Hyperfläche des gewöhnlichen Phasenraums, welche im Falle eines autonomen Hamiltonsystems durch die Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}) = E_0$ eine konstante (Energie-)Oberfläche darstellt.

Mit den erweiterten Vektoren $\vec{q}_1$ und $\vec{p}_1$, sowie mit H_1 wie in Gl. (6) definiert, schreibt sich das Variationsintegral der Gl. (4) nun wie gewünscht

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left[\vec{p}_1(s) \frac{d\vec{q}_1(s)}{ds} - H_1\big(\vec{q}_1(s), \vec{p}_1(s)\big) \right] ds \stackrel{!}{=} 0 \,. \tag{7}$$

Hierbei müssen wir beachten, daß H_1 nicht *identisch* verschwindet, sondern daß $H_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1) = 0$ eine *implizite Funktion* bezeichnet. Im Zuge der Berechnung der Variation (7) werden die partiellen Ableitungen von H_1 gebildet — und diese verschwinden i.a. nicht. Somit darf H_1 im Integranden des Variationsintegrals (7) *nicht* eliminiert werden!

Das Variationsintegral (7) verschwindet wieder genau dann, wenn der „erweiterte Phasenraumweg" $(\vec{q}_1(s), \vec{p}_1(s))$ die „erweiterten kanonischen Gleichungen" erfüllt

$$\frac{d\vec{q}_1}{ds} = \frac{\partial H_1}{\partial \vec{p}_1} \,, \qquad \frac{d\vec{p}_1}{ds} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vec{q}_1} \,,$$

in Analogie zu den kanonischen Gleichungen (2). In den Variablen $\vec{q}$ und $\vec{p}$, sowie t und E ausgedrückt, schreibt sich dieser Satz von $2n+2$ Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{\partial H_1}{\partial \vec{p}} \,, \; \frac{d\vec{p}}{ds} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vec{q}} \,, \; \frac{dt}{ds} = -\frac{\partial H_1}{\partial E} \,, \; \frac{dE}{ds} = \frac{\partial H_1}{\partial t} \,. \tag{8}$$

Setzen wir noch die erweiterte Hamiltonfunktion H_1 gemäß ihrer Definition von Gl. (6) ein, so ergibt sich der erweiterte Satz von kanonischen Gleichungen als

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q}}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \,, & \frac{d\vec{p}}{ds} &= -\frac{dt}{ds} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \,, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{dt}{ds} \,, & \frac{dE}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{\partial H}{\partial t} \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Die beiden Gleichungen der ersten Zeile sind offensichtlich äquivalent zu den konventionellen kanonischen Gleichungen (2). Die Beschreibung der Dynamik des gegebenen Systems im erweiterten Formalismus stimmt folglich mit der konventionellen Beschreibung überein. In der rechten Gleichung der zweiten Zeile erzeugt nunmehr auch die partielle *Zeitableitung* von H eine kanonische Gleichung, nämlich die Bewegungsgleichung für $E(s)$. Andererseits finden wir in den Gln. (9), wie sie sich aus den Gln. (8) ergeben, nur eine *Identität* als zugehörige konjugierte Bewegungsgleichung für $t(s)$. Somit entsteht aus dem verallgemeinerten Variationsprinzip (7) nur ein *formales*, aber *kein substantielles* neues Paar von kanonischen Gleichungen — die Parametrisierung der Zeit $t = t(s)$ bleibt unbestimmt. Im Hinblick auf die Integration der Bewegungsgleichungen liefert die „erweiterte" Beschreibung somit die Aussage, daß wir die Zeit t als beliebige differenzierbare Funktion $t = t(s)$ parametrisieren dürfen, ohne das Prinzip der kleinsten Wirkung von Gl. (1) zu verletzen. Diese Tatsache wurde bereits von H. Poincaré entdeckt und ist deshalb unter dem Begriff der „Poincaréschen (symplektischen) Zeitskalierung" bekannt. Wichtige Anwendungen liefert diese Methode auf dem Gebiet der numerischen Integration von Bewegungsgleichungen dynamischer Systeme mit Singularitäten. Durch geschickte Parametrisierung der Zeit können Singularitäten bisweilen eliminiert werden. Als Beispiel sei nur L. Eulers Regularisierung der Bewegungsgleichung des Kepler-Systems genannt [7].

Der eigentliche Gewinn der verallgemeinerten Form des Variationsintegrals liegt jedoch auf dem Gebiet der „kanonischen Transformationen". Die *Freiheit*, die Parametrisierung der Zeit $t = t(s)$ zu wählen, gestattet es nämlich, *verallgemeinerte* kanonische Transformationen zu definieren, bei welchen neben den kanonischen Variablen $\vec{q}$ und $\vec{p}$ auch die Zeit t transformiert wird. Und genau diese Verallgemeinerung benötigen wir, wenn die Physik der beteiligten Systeme auch eine Transformation der Zeitskalen *erfordert*. Als ein Beispiel hierfür werden wir im folgenden die Lorentz-Transformation als kanonische Transformation formulieren. Aber auch die Abbildung eines explizit zeit<u>ab</u>hängigen Hamiltonsystems in ein zeit<u>unab</u>hängiges erfordert eine allgemeinere Fassung der kanonischen Transformationstheorie.

Verallgemeinerte kanonische Transformationen

In der auf Grundlage des speziellen Variationsintegrals (1) definierten Bedingung (3) für kanonische Transformationen spielt die Zeit t die Rolle des *gemeinsamen unabhängigen Parameters* von Ausgangs- und

Zielsystem. Der tatsächliche Vorteil, das Variationsintegral (1) in der erweiterten Formulierung von Gl. (7) zu verwenden, besteht nun darin, das letzteres die Grundlage allgemeinerer kanonischer Transformationen liefert, die es erlauben, zwei Hamiltonsysteme H und H' mit *unterschiedlichen* Zeitskalen $t(s)$ und $t'(s)$ miteinander zu verknüpfen

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) \xrightarrow{\text{Kanon. Transf.}} H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t')\,. \tag{10}$$

Beide Systeme dürfen sich demnach über die Transformation der generalisierten Koordinaten $\vec{q}$ und $\vec{p}$ hinaus, durch *endliche Differenzen ihrer jeweiligen Zeiten* unterscheiden. Der in Gl. (4) eingeführte Evolutionsparameter s bildet nun — anstelle der Zeit t — die beiden Systemen gemeinsame unabhängige Variable.

Analog zur konventionellen kanonischen Transformationstheorie bezeichnen wir auch in der „erweiterten“ Formulierung eine Abbildung (10) der abhängigen Variablen des Systems als „kanonisch“, wenn diese das Variationsprinzip (7) in der Form erhält

$$\begin{aligned}\delta \int_{s_1}^{s_2} \left[\vec{p}_1 \frac{d\vec{q}_1}{ds} - H_1\big(\vec{q}_1, \vec{p}_1\big)\right] ds \\ = \delta \int_{s_1}^{s_2} \left[\vec{p}_1' \frac{d\vec{q}_1'}{ds} - H_1'\big(\vec{q}_1', \vec{p}_1'\big)\right] ds\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Wie üblich bedeutet dies, daß sich die Integranden beider Integrale um die totale Ableitung dF_1/ds einer Funktion $F_1(\vec{q}_1, \vec{q}_1', s)$ unterscheiden dürfen. Letztere wird wie bisher als „erzeugende Funktion“ der — nunmehr verallgemeinerten — kanonischen Transformation bezeichnet. Mit dieser Funktion ergibt die Transformationsbedingung (11), also die Forderung nach Erhaltung des Variationsprinzips

$$\vec{p}_1 \frac{d\vec{q}_1}{ds} - H_1 = \vec{p}_1' \frac{d\vec{q}_1'}{ds} - H_1' + \frac{dF_1}{ds}\,. \tag{12}$$

Andererseits ist die totale Ableitung dF_1/ds einer Funktion $F_1(\vec{q}_1, \vec{q}_1', s)$ gegeben durch

$$\frac{dF_1}{ds} = \frac{\partial F_1}{\partial \vec{q}_1} \frac{d\vec{q}_1}{ds} + \frac{\partial F_1}{\partial \vec{q}_1'} \frac{d\vec{q}_1'}{ds} + \frac{\partial F_1}{\partial s}\,. \tag{13}$$

Der Koeffizientenvergleich von Gln. (12) und (13) liefert dann den Satz der $2n+2$ Transformationsregeln für die erweiterten kanonischen Koordinatenvektoren $\vec{q}_1$ und $\vec{p}_1$, sowie die Transformationsregel für die erweiterte Hamiltonfunktion H_1

$$\vec{p}_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \vec{q}_1}\,, \quad \vec{p}_1' = -\frac{\partial F_1}{\partial \vec{q}_1'}\,, \quad H_1' = H_1 + \frac{\partial F_1}{\partial s}\,. \tag{14}$$

Mit Hilfe der „erweiterten“ Legendre-Transformation

$$F_2(\vec{q}_1, \vec{p}_1', s) = F_1(\vec{q}_1, \vec{q}_1', s) + \vec{q}_1'\,\vec{p}_1'$$

kann die erzeugende Funktion der kanonischen Transformation auch in Abhängigkeit von den ursprünglichen „Orten“ $\vec{q}_1$ und den neuen „Impulsen“ $\vec{p}_1'$ dargestellt werden. Der Koeffizientenvergleich der Differentialform dF_2 liefert nach Einsetzen von $\vec{p}_1'$ aus Gl. (14) den äquivalenten Satz von Transformationsregeln

$$\vec{p}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}_1}\,, \quad \vec{q}_1' = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{p}_1'}\,, \quad H_1' = H_1 + \frac{\partial F_2}{\partial s}\,.$$

Wie die erweiterten kanonischen Gleichungen (8), so lassen sich diese Transformationsregeln für $\vec{p}_1$ und $\vec{q}_1'$ wieder in den Koordinaten $\vec{q}$, t und $\vec{p}$, E ausdrücken

$$\vec{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}}\,,\ \ \vec{q}\,' = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{p}\,'}\,,\ \ E = -\frac{\partial F_2}{\partial t}\,,\ \ t' = -\frac{\partial F_2}{\partial E'}\,. \tag{15}$$

Die Transformationsregel für die gewöhnlichen Hamiltonfunktionen $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t')$ folgt schließlich aus der allen Darstellungen gemeinsamen Transformationsregel für die erweiterten Hamiltonfunktionen $H_1' = H_1 + \partial F/\partial s$. Ausführlich schreibt sich diese Regel mit der Definition (6) der erweiterten Hamiltonfunktion

$$\Big[H'(\vec{q}\,', \vec{q}\,', t') - E'\Big] \frac{dt'}{ds} = \Big[H(\vec{q}, \vec{q}, t) - E\Big] \frac{dt}{ds} + \frac{\partial F}{\partial s}.$$

Ist insbesondere die Erzeugende F_i nicht explizit s-abhängig, so können wir den Evolutionsparameter s eliminieren und erhalten so die speziellere Transformationsregel für die Hamiltonfunktionen unter verallgemeinerten kanonischen Transformationen

$$\Big[H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t') - E'\Big] \frac{\partial t'}{\partial t} = H(\vec{q}, \vec{p}, t) - E. \tag{16}$$

Es ist nun interessant zu beobachten, daß *jede* konventionelle Erzeugende $f_2(\vec{q}, \vec{p}\,', t)$ auch als eine spezielle erzeugende Funktion $F_2^{\text{konv}}(\vec{q}, \vec{p}\,', t, E')$ im erweiterten Phasenraum aufgefaßt werden kann. Definieren wir nämlich

$$F_2^{\text{konv}}(\vec{q}, \vec{p}\,', t, E') = f_2(\vec{q}, \vec{p}\,', t) - t\,E'\,,$$

so erhalten die Transformationsregeln (15) die spezielle Form

$$\vec{p} = \frac{\partial f_2}{\partial \vec{q}},\ \vec{q}\,' = \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}\,'},\ E = E' - \frac{\partial f_2}{\partial t},\ t' = t,\ H_1' = H_1. \tag{17}$$

Wegen $\partial t'/\partial t \equiv 1$ schreibt sich die Transformationsregel für die Hamiltonfunktionen gemäß Gl. (16) als

$$H' - E' = H - E\,.$$

Zusammen mit der Regel für E aus Gln. (17) erhält die Transformationsregel für die konventionellen Hamiltonfunktionen H, H' somit die aus den Lehrbüchern bekannte Form

$$H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t) + \frac{\partial f_2(\vec{q}, \vec{p}\,', t)}{\partial t}\,. \tag{18}$$

Wir sehen, daß die Menge der *konventionellen* kanonischen Transformationen genau der *Untermenge* der allgemeineren kanonischen Transformationen im erweiterten Phasenraum entspricht, für die $t' = t$ gilt. In diesem Falle ist also die Zeit t der *gemeinsame* unabhängige Parameter von Ausgangs- und Zielsystem — so wie es die auf der Bedingung (3) beruhende konventionelle kanonische Transformationstheorie voraussetzt.

Offensichtlich ermöglichen die „erweiterten" erzeugenden Funktionen F_2 gemäß der vierten Regel der Gln. (15) aber auch allgemeinere kanonische Transformationen, nämlich solche, die es erlauben, zwei Hamiltonsysteme H, H' an *verschiedenen* Systemzeiten $t \neq t'$ miteinander zu verknüpfen. Die Transformationsgleichung $H_1' = H_1 + \partial F_2/\partial s$ für die erweiterten Hamiltonfunktionen erzeugt dementsprechend eine *allgemeinere* Relation der Hamiltonfunktionen H', H als die konventionelle von Gl. (18). Und diese allgemeineren Transformationen werden benötigt! Denn es ist ja naheliegend, daß die kanonische Abbildung eines nicht-autonomen Hamiltonsystems ($E \neq$ const.) auf ein autonomes ($E' =$ const.) auch eine nichttriviale Transformation der zu $-E$ konjugierten Variablen, nämlich der Zeit t, erfordert. Zur Lösung eines solchen Problems sind wir somit auf eine erzeugende Funktion $F_2(\vec{q}, \vec{p}\,', t, E')$ im erweiterten Phasenraum angewiesen.

Beispiel 1: Der zeitabhängige harmonische Oszillator

Als ein einfaches Beispiel einer kanonischen Transformation im erweiterten Phasenraum werden wir nun zeigen, daß der zeitabhängige harmonische Oszillator auf diese Weise *direkt* in einen zeitunabhängigen harmonischen Oszillator überführt werden kann. Die Hamiltonfunktion des Ausgangssystems sei gegeben durch

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \tfrac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + \tfrac{1}{2}\omega^2(t)\,\vec{q}^{\,2}\,, \tag{19}$$

mit $\omega^2(t)$ als einer *beliebigen* differenzierbaren Zeitfunktion. Das Zielsystem — mit t' als unabhängiger Variabler — soll die gleiche Form besitzen, sein Potential nun aber nicht mehr explizit zeitabhängig sein

$$H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,') = \tfrac{1}{2}\vec{p}\,'^{\,2} + \tfrac{1}{2}\omega_0^2\,\vec{q}\,'^{\,2}\,. \tag{20}$$

Die erzeugende Funktion $F_2(\vec{q}, \vec{p}\,', t, E')$, welche die Abbildung der Hamiltonfunktion (19) auf Gl. (20) definiert, ist gegeben durch [8]

$$F_2\big(\vec{q}, \vec{p}\,', t, E'\big) = \frac{\vec{q}\,\vec{p}\,'}{\sqrt{\xi(t)}} + \frac{\dot{\xi}(t)}{4\xi(t)}\,\vec{q}^{\,2} - E'\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)}\,.$$

Hierin bezeichnet $\xi(t)$ eine *an dieser Stelle noch unbestimmte*, also frei verfügbare differenzierbare Zeitfunktion. Gemäß den Regeln von Gln. (15) ergeben sich die Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit als

$$\begin{pmatrix} \vec{q}\,' \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\xi} & 0 \\ -\frac{1}{2}\dot{\xi}/\sqrt{\xi} & \sqrt{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}\,, \quad t' = \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)}\,. \tag{21}$$

Wir sehen, daß die Zeitverschiebung zwischen beiden Systemen vom Verlauf der noch unbestimmten Zeitfunktion $\xi(t)$ festgelegt wird. Die Transformationsregel $E = -\partial F_2/\partial t$ schreibt sich ausführlich für unser F_2:

$$E' = \xi\,E - \tfrac{1}{2}\vec{q}\,\vec{p}\,'\frac{\dot{\xi}}{\sqrt{\xi}} + \tfrac{1}{4}\vec{q}^{\,2}\left(\ddot{\xi} - \frac{\dot{\xi}^2}{\xi}\right)\,. \tag{22}$$

Der Zusammenhang der Hamiltonfunktionen H, H' folgt direkt aus der Transformationsregel (16), da unser F_2 nicht explizit s-abhängig ist

$$H' - E' = \xi(t)\big(H - E\big)\,.$$

Einsetzen von Gl. (19) und Elimination der ungestrichenen Variablen entsprechend den Gln. (21) und (22) ergibt schließlich die geforderte Hamiltonfunktion H' in der Form von Gl. (20), sofern der Koeffizient ω_0^2 des Potentials mit

$$\omega_0^2 = \tfrac{1}{2}\xi\ddot{\xi} - \tfrac{1}{4}\dot{\xi}^2 + \omega^2(t)\,\xi^2 \tag{23}$$

identifiziert wird. Das transformierte Potential ist demnach genau dann nicht explizit zeitabhängig, wenn $d\omega_0^2/dt' = 0$ ist, wenn also

$$\dddot{\xi}(t) + 4\dot{\xi}\omega^2(t) + 4\xi\omega\dot{\omega} = 0 \tag{24}$$

erfüllt ist. *Als Folge dieser Forderung* ist die Funktion $\xi(t)$ nunmehr bestimmt — und somit die konkrete Korrelation (21), (22) der Systeme (19) und (20). Ist $\xi(t)$ eine Lösung der linearen, homogenen Gleichung dritter Ordnung (24), so ist $\omega_0^2 = \text{const.}$, der Funktionswert von H' also eine Konstante der Bewegung. Wir sehen somit, daß erst die Freiheit der erweiterten kanonischen Transformationen, die Zeitkorrelation beider Systeme nach Belieben festzulegen, es uns ermöglicht, das Zielsystem H' seiner expliziten Zeitabhängigkeit zu entledigen.

Drücken wir nun dieses $H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,') = \text{const.}$ in den ursprünglichen Koordinaten $\vec{q}$ und $\vec{p}$ aus, so entsteht eine Invariante $I(\vec{q}, \vec{p}, t)$ des Ausgangssystems (19)

$$H' \equiv I(\vec{q}, \vec{p}, t) = \xi H - \tfrac{1}{2}\dot{\xi}\,\vec{q}\,\vec{p} + \tfrac{1}{4}\ddot{\xi}\,\vec{q}^{\,2}\,. \qquad (25)$$

In einer alternativen Formulierung mit $\rho^2(t) = \xi(t)$ wurde die Invariante (25) und die mit ihr verknüpfte Bestimmungsgleichung (23) erstmals von Lewis [9] im Jahre 1967 präsentiert. Implizit war dieses Ergebnis aber auch schon in der früheren Arbeit von Courant und Snyder [10] enthalten. Auch die in letzterer Arbeit gefundene explizite Darstellung der Lösungsfunktion $q(t)$ des eindimensionalen zeitabhängigen harmonischen Oszillators läßt sich nun leicht reproduzieren. Die wohlbekannte explizite Lösung $q'(t')$ des gewöhnlichen harmonischen Oszillators (20) muß lediglich mit Hilfe der Transformationsgleichungen (21) in den Koordinaten q, p und der Zeit t des zeitabhängigen Systems (19) ausgedrückt werden.

Für unser vorliegendes System können wir der Zeitfunktion $\xi(t)$ unmittelbar eine physikalische Bedeutung zuordnen. Wir überzeugen uns nämlich leicht, daß

$$\xi(t) = \vec{q}^{\,2}(t) \qquad (26)$$

eine Lösung von Gl. (24) darstellt, vorausgesetzt natürlich, daß $\vec{q}(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung des zeitabhängigen harmonischen Oszillators

$$\ddot{\vec{q}} + \omega^2(t)\,\vec{q} = 0 \qquad (27)$$

ist. Setzen wir nun Gl. (26) in die Darstellung (25) der Invarianten I ein, so erhält letztere die äquivalente Form

$$I = \vec{q}^{\,2}\vec{p}^{\,2} - (\vec{q}\,\vec{p})^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(p_i\,q_j - q_i\,p_j\right)^2\,, \qquad (28)$$

deren Invarianz wir durch Berechnung der Zeitableitung leicht nachrechnen. Wie wir sehen, besitzt die Invariante (28) des zeitabhängigen harmonischen Oszillators (19) genau die Form eines Drehimpulserhaltungssatzes in Zentralkraftfeldern. Die Größe $\varepsilon_{\text{rms}} = \sqrt{I}/n$ ist auf dem Gebiet der Beschleunigerphysik unter dem Namen „RMS-Emittanz“ geläufig. Die RMS-Emittanz ist somit invariant, solange die Teilchenbewegung durch die *lineare* Bewegungsgleichung (27) approximiert werden darf und die Teilchenzahl erhalten bleibt. Insgesamt offenbart sich somit, daß das System des zeitabhängigen harmonischen Oszillators — das lange Zeit viele Schwierigkeiten bereitet hat — mit Hilfe einer kanonischen Transformation im erweiterten Phasenraum in wenigen Schritten analysiert werden kann.

Beispiel 2: Regularisierung der Kepler-Bewegung

Eine Transformation der Zeitskala eines dynamischen Systems, formuliert als eine erweiterte kanonische Transformation, soll im folgenden am Beispiel von L. Eulers Regularisierung der Keplerbewegung dargestellt werden. Für den eindimensionalen Fall ergibt sich die Hamiltonfunktion dieser Bewegung in normierter Form [11]

$$H(x,p) = \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{K^2}{x}\,, \quad K^2 = \Gamma\cdot(M+m)\,.$$

Hierin bezeichnet Γ die Gravitationskonstante, M, m die Massen und x den linearen Abstand der Himmelskörper. Da H nicht explizit zeitabhängig ist, erhalten wir $dE/dt = \partial H/\partial t = 0$, und somit

$$E = \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{K^2}{x} = \text{const}\,. \qquad (29)$$

Die Bewegungsgleichung für $x(t)$ ist am Ort des Zusammenstoßes $x = 0$ offensichtlich singulär

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K^2}{x^2} = 0\,.$$

Leonhard Euler entwickelte als erster die Idee, diese Bewegungsgleichung durch eine Transformation der Zeitskala zu regularisieren. Diese Regularisierung kann als eine erweiterte kanonische Transformation aufgefaßt werden, welche durch die Funktion

$$F_2\big(x, p', t, E'\big) = x\,p' - E'\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)}\,, \qquad (30)$$

erzeugt wird — mit $\xi(t)$ als einer zunächst unbestimmten Zeitfunktion. Für dieses F_2 erhält man die Transformationsregeln gemäß (15) als

$$x' = x\,, \quad p' = p\,, \quad t' = \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)}\,, \quad E' = \xi(t)\,E\,. \tag{31}$$

Da unser F_2 von Gl. (30) nicht explizit s-abhängig ist, folgt die Transformationsregel für die Hamiltonfunktionen gemäß Gl. (16) einfach als $H' - E' = \xi(t)\big(H - E\big)$. Die transformierte Hamiltonfunktion H' ist somit

$$H'(x,p,t') = \xi(t')\left(\tfrac{1}{2}p^2 - \frac{K^2}{x}\right)\,. \tag{32}$$

Die Koordinaten $x' = x$, $p' = p$ und die Funktion ξ werden nun als Funktionen von t' aufgefaßt. Da die Transformation kanonisch ist, bleibt die Form der kanonischen Gleichungen im transformierten System erhalten

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{\partial H'}{\partial p} = \xi(t')\,p\,, \quad \frac{dp}{dt'} = -\frac{\partial H'}{\partial x} = -\xi(t')\,\frac{K^2}{x^2}\,.$$

Die Bewegungsgleichung für $x(t')$ und die Gleichung (29) für die Energieerhaltung ergeben sich nun als

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt'^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dt'}\frac{dx}{dt'} + \frac{K^2\xi^2}{x^2} &= 0\,, \\ 2\xi^2\left(E + \frac{K^2}{x}\right) &= \left(\frac{dx}{dt'}\right)^2. \end{aligned} \tag{33}$$

Nachdem nun die transformierte Bewegungsgleichung herausgearbeitet worden ist, steht es uns frei, die noch unbestimmte Zeitfunktion $\xi(t')$ mit einer Funktion der kanonischen Variablen $x(t')$ und $p(t')$ zu identifizieren, wenn wir letztere als Funktionen der Zeit t' auffassen. Durch die Festlegung von $\xi(t')$ wird dann die Relation der „skalierten“ Zeit t' mit der physikalischen Zeit t eindeutig bestimmt. Im hier vorliegenden Fall definieren wir einfach

$$\xi(t') \equiv x(t') \quad \Longrightarrow \quad t(t') = \int_0^{t'} x(\tau)\,d\tau\,.$$

Die Bewegungsgleichung und die Energieerhaltungsgleichung (33) vereinfachen sich nun zu

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt'^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + K^2 &= 0\,, \\ 2E\,x^2 + 2K^2\,x &= \left(\frac{dx}{dt'}\right)^2. \end{aligned}$$

Einfügen der Energieerhaltungsgleichung in die Bewegungsgleichung ergibt nun die regularisierte Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt'^2} - 2E\,x = K^2\,.$$

Zusammenfassend können wir nun feststellen, daß die Zeitskalierungstransformation (31) als eine erweiterte kanonische Transformation aufgefaßt werden kann. Es ist jedoch zu beachten, daß die Identifikation der frei wählbaren Zeitfunktion $\xi(t')$ mit einer geeigneten Kombination der Zeitfunktionen $x(t')$ und $p(t')$ nur *nach* Ausarbeitung der transformierten kanonischen Gleichungen erfolgen darf. Die gewählte Identifikation (hier: $\xi(t') \equiv x(t')$) darf dann nicht rückwärts in die Hamiltonfunktion H' von Gl. (32) eingesetzt werden, da $\xi(t')$ weiterhin eine reine Zeitfunktion bleibt und nicht als eine Funktion der kanonischen Variablen x, p behandelt werden darf.

Beispiel 3: Die Lorentz-Transformation

Wie die spezielle Relativitätstheorie [12] gezeigt hat, ist die *Zeit* entgegen unserer Anschauung nichts absolutes, sondern abhängig vom jeweiligen Bezugssystem. Die Lorentz-Transformation, welche die Abbildung zwischen gleichförmig bewegten Bezugssystemen — den sogenannten Inertialsystemen — beschreibt, ist demnach *notwendigerweise* mit einer Zeittransformation $t \mapsto t'$ verbunden. Somit kann nur eine kanonische Transformation im erweiterten Phasenraum eine derartige Abbildung beschreiben. Als ein drittes und sehr instruktives Beispiel soll nun gezeigt werden, daß die Lorentz-Transformation in der Tat auch als kanonische Transformation im erweiterten Phasenraum aufgefaßt werden kann. Ihre erzeugende Funktion $F_2\big(q, p', t, E'\big)$ ist gegeben durch

$$F_2 = \gamma\,(p'q - E't) - \beta\gamma\left(p'ct - E'\,\frac{q}{c}\right)\,, \tag{34}$$

mit $\beta = v/c$ als die auf die Lichtgeschwindigkeit c normierte konstante Relativgeschwindigkeit v beider Inertialsysteme. In dieser Formulierung sind die Koordinatensysteme so ausgerichtet, daß die Relativbewegung entlang der q-Achse erfolgt — was aufgrund der vorausgesetzten Gleichförmigkeit der Bewegung immer möglich ist. Wie üblich bezeichnet γ den dimensionslosen Längen- und Zeitfaktor $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Die Transformationsregeln (15) für kanonische Transformationen im erweiterten Phasenraum liefern für q' und t' mit der erzeugenden Funktion (34) die wohlbekannten Gleichungen der Lorentz-Transformation

$$\begin{pmatrix} q' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ ct \end{pmatrix} . \qquad (35)$$

Für die kanonisch konjugierten Koordinaten ergeben sich aus der vorliegenden erzeugenden Funktion (34) die Transformationsregeln

$$\begin{pmatrix} p' \\ E'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ E/c \end{pmatrix} . \qquad (36)$$

Somit erhalten wir *direkt* die bekannten Transformationsgleichungen für Energie und Impuls. Wir können schließlich die beiden Transformationen (35) und (36) in einer einzigen orthogonalen Transformation vereinigen

$$\begin{pmatrix} q' \\ ict' \\ p' \\ iE'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & i\gamma\beta & 0 & 0 \\ -i\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ ict \\ p \\ iE/c \end{pmatrix}$$

Die Orthogonalität dieser Matrix ist offensichtlich: wir erhalten ihre Inverse durch den Übergang $\beta \mapsto -\beta$ — und dies ist genau die transponierte Transformationsmatrix. Somit ist auch klar, daß die Determinante dieser Transformation gleich Eins ist — wie es allgemein für kanonische Transformationen notwendig ist. Da eine kanonische Transformation immer die Erhaltung der symplektischen Struktur der beteiligten Hamiltonsysteme gewährleistet, gelingt es, mit den Abbildungsregeln für Orte q und Zeit t auch gleich die Regeln für die konjugierten Größen Impuls p und Energie E zu bestimmen.

Die erzeugende Funktion (34) der Lorentz-Transformation ist *nicht* explizit s-abhängig. Gemäß der zugehörigen Regel (16) transformiert sich die Hamiltonfunktion H eines Ein-Teilchen-Systems als

$$H(q, p, t) = \gamma H'(q', p', t') + \beta\gamma p' c . \qquad (37)$$

Wie erwartet transformieren sich also die Hamiltonfunktionen H, H' genau so wie ihre jeweiligen Werte E, E'.

Die Größen E und E' bezeichnen im Kontext der Lorentz-Transformation die Summen aus kinetischer Energie und Ruheenergie $m_0 c^2$. Andererseits stellen E und E' gemäß Gl. (5) jeweils den *Wert* der Hamiltonfunktionen H und H' dar. Wir sind deshalb mit den Hamiltonfunktionen H und H', sowie mit deren Erweiterungen H_1 und H_1', auf die einer *kräftefreien Bewegung* festgelegt. Die Hamilton-Funktion H beschreibt somit den kräftefreien Anteil der Bewegung eines Teilchens in seinem Bezugssystems, während H' dieses Teilchen aus der Sicht eines *anderen*, sich seinerseits gleichförmig — also kräftefrei — mit der Geschwindigkeit βc bewegenden Bezugssystems beschreibt. *Beschleunigte* Bewegungen eines Teilchens innerhalb eines Bezugssystems können voraussetzungsgemäß nur nicht-relativistisch beschrieben werden — das System eines beschleunigten Teilchens ist nämlich kein Inertialsystem.

Wir werden im folgenden Beispiel die explizite Form der Hamilton-Funktion $H_{\mathrm{L}}(p)$ eines freien Teilchens ableiten, welche die geforderte Transformationseigenschaft von Gl. (37) besitzt. Die nicht Lorentz-invariante Form H_{NL} der Hamiltonfunktion eines freien Teilchens der Masse m ist:

$$H_{\mathrm{NL}}(p) = \frac{p^2}{2m} + mc^2 . \qquad (38)$$

Hier wurde die übliche Normierung gewählt, daß $H_{\mathrm{NL}} = mc^2$ für den Spezialfall $p = 0$. Da nur Ausdrücke der Form $q^2 - c^2t^2$ und $p^2 - E^2/c^2$ unter den Transformationen (35), (36) invariant bleiben, ist die Hamiltonfunktion von Gl. (38) offensichtlich nicht Lorentz-invariant. Jedoch können wir im erweiterten Phasenraum die Lorentz-invariante Form von (38) leicht konstruieren, indem wir den erforderlichen E-Term hinzuaddieren

$$H_{\mathrm{L}}(p, E) = \frac{1}{2m} \left[p^2 - \frac{\left(E - mc^2\right)^2}{c^2} \right] + mc^2 . \qquad (39)$$

Die Subtraktion des Terms mc^2 in der inneren Klammer beschreibt lediglich eine Lorentz-invariante Verschiebung des Nullpunkts von E, in Übereinstimmung mit der oben gewählten Normierung. Gemäß Gl. (5) kann die neue Hamiltonfunktion (39) äquivalent im üblichen Phasenraum ausgedrückt werden, indem wir den Wert E der Hamiltonfunktion H_{L} durch die Hamiltonfunktion selbst ersetzen

$$H_{\mathrm{L}}(p) = \frac{1}{2m} \left[p^2 - \frac{\left(H_{\mathrm{L}} - mc^2\right)^2}{c^2} \right] + mc^2 . \qquad (40)$$

Lösen wir nun noch Gl. (40) nach H_{L} auf, erhalten wir das bekannte Resultat

$$H_{\mathrm{L}}(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

der Lorentz-invarianten Form der Hamiltonfunktion eines freien Teilchens.

Schlußbemerkungen

Es wurde gezeigt, daß sich die konventionelle Bedingung für kanonische Transformationen (3) durch eine *analoge* Formulierung (11) im erweiterten Phasenraum verallgemeinern läßt. Die entscheidende Idee ist hierbei, die Zeit t nicht mehr als die dem Ausgangs- und Zielsystem *gemeinsame* unabhängige Variable zu verstehen. Stattdessen besitzen in der verallgemeinerten Formulierung beide Systeme für sich gesehen jeweils *eigene* unabhängige Variable — t und t' — deren Korrelation durch die „erweiterte“ erzeugende Funktion F_2 bestimmt wird. Der „Evolutionsparameter“ s stellt die beiden Systemen gemeinsame unabhängige Variable dar. Somit spielt s in der verallgemeinerten Formulierung genau die Rolle, welche die Zeit t in der konventionellen Theorie innehat.

Grundlage der erweiterten kanonischen Transformationstheorie ist die verallgemeinerte Darstellung des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Form von Gl. (7). Die Zeit t wird hierin zusammen mit dem negativen Funktionswert $-E$ der Hamiltonfunktion H als ein zusätzliches Paar kanonisch konjugierter Variabler aufgefaßt. Von ausschlaggebender Bedeutung ist hierbei die sorgfältige Unterscheidung der Hamilton*funktion* H von ihrem Funktions*wert* E. Nur dann nämlich erhalten wir die erweiterte Hamiltonfunktion $H_1 = 0$ der Gl. (6) als *implizite Funktion* der Variablen des erweiterten Phasenraums — und folglich die Verallgemeinerung des Variationsintegrals in der Form von Gl. (7).

In den wenigen Lehrbüchern, welche die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Variationsintegrals (1) überhaupt ansprechen, wird diese Unterscheidung zumeist versäumt. Infolgedessen wird fälschlicherweise implizit angenommen [3, 13] — oder sogar auch explizit behauptet [14] — daß H_1 *identisch* verschwindet, also im Variationsintegral (7) eliminiert werden kann. Auf diese Weise entsteht ein Variationsintegral ohne Hamiltonfunktion. Dies ist offensichtlich ein sinnloses Ergebnis, da die Hamiltonfunktion als Trägerin aller Informationen über das gegebene System niemals aus einer Realisierung des Prinzips der kleinsten Wirkung herausfallen kann.

Aber auch in Lehrbüchern, welche die Unterscheidung von H und E korrekt treffen (siehe, z.B. [15]), wird durch eine vorzeitige Festlegung der Parametrisierung der Zeit auf $dt/ds \equiv 1$ die zusätzliche Freiheit des erweiterten Phasenraums gleich wieder aufgegeben — und somit der Nutzen des Ansatzes verschenkt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die alte Idee der Erweiterung des Phasenraums durch eine Parametrisierung der Zeit in der zur Verfügung stehenden Literatur der klassischen Mechanik bisher noch nicht fruchtbringend dargestellt worden ist. Dabei zeigt die hier vorgelegte Skizzierung, daß dies durchaus möglich wäre, wenn die konventionelle kanonische Transformationstheorie durch die des erweiterten Phasenraums ersetzt — oder zumindest ergänzt würde. Die Ableitung der Regeln für kanonische Transformationen aus einer erzeugenden Funktion stimmt der Form nach für beide Fälle vollständig überein — der Mehraufwand für die „erweiterten“ ist somit geringfügig. Letztere ermöglichen jedoch Abbildungen, welche auch die Zeitskalen transformieren — und dies wird, wie die Beispiele zeigen, oftmals benötigt.

Literatur

[1] *M. Planck*, Das Prinzip der kleinsten Wirkung, in: Physik, unter Red. von E. Lecher, pp. 772-782, Teubner-Verlag, Leipzig, 1925

[2] *L.D. Landau, E.M. Lifschitz*, Mechanik, Akademie-Verlag, Berlin, 1973

[3] *H. Goldstein*, Klassische Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1983

[4] *W. Greiner*, Theoretische Physik, Band 2: Mechanik, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1998

[5] *J.V. José, E.J. Saletan*, Classical Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998

[6] *E.T. Whittaker*, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1947. Die erste Auflage wurde im Jahre 1904 herausgegeben.

[7] *C.L. Siegel, J.K. Moser*, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1971

[8] *J. Struckmeier*, Hamiltonian dynamics on the symplectic extended phase space for autonomous and non-autonomous systems, J. Phys. A: Math. Gen. **38** 1257–1278 (2005)

[9] *H.R. Lewis*, Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1967); J. Math. Phys. **9**, 1976–1986 (1968)

[10] *E.D. Courant, H.S. Snyder*, Ann. Phys. (N.Y.) **3**, 1 (1958)

[11] *E.L. Stiefel, G. Scheifele*, Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1971

[12] *L.D. Landau, E.M. Lifschitz*, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1973

[13] *A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman*, Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlag, New York, 1983

[14] *C. Lanczos*, The Variational Principles of Mechanics, 4th edition, Dover Publications, New York, 1986; zuerst veröffentlicht als Band 4 der Serie „Mathematical Expositions“, University of Toronto Press, Toronto, Kanada, 1949

[15] *W. Thirring*, Lehrbuch der Mathematischen Physik, Springer-Verlag, Wien, 1977