

Der „erweiterte Phasenraum“ und seine Anwendungen

Jürgen Struckmeier

j.struckmeier@gsi.de, www.gsi.de/~struck

Vortrag im Rahmen des Winterseminars

„Aktuelle Probleme der Beschleuniger- und Plasmaphysik“

des Instituts für Angewandte Physik

der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Riezlern, 9.–15. März 2003

Motivation

- Aufgabe: Entwurf eines neuen oder Untersuchung eines existierenden dynamischen Systems (z.B. eines Speicherrings). Optimierung der ionenoptischen Eigenschaften (z.B. Minimierung der Halo-Bildung).

Motivation

- Aufgabe: Entwurf eines neuen oder Untersuchung eines existierenden dynamischen Systems (z.B. eines Speicherrings). Optimierung der ionenoptischen Eigenschaften (z.B. Minimierung der Halo-Bildung).
- Analytische Methode: Suche nach Invarianten, also nach fundamentalen Charakteristiken des Systems.

Motivation

- Aufgabe: Entwurf eines neuen oder Untersuchung eines existierenden dynamischen Systems (z.B. eines Speicherrings). Optimierung der ionenoptischen Eigenschaften (z.B. Minimierung der Halo-Bildung).
- Analytische Methode: Suche nach Invarianten, also nach fundamentalen Charakteristiken des Systems.
- Benötigt ist: systematische Vorgehensweise zum Herausarbeiten der Invarianten *explizit zeitabhängiger* Systeme.

Motivation

- Aufgabe: Entwurf eines neuen oder Untersuchung eines existierenden dynamischen Systems (z.B. eines Speicherrings). Optimierung der ionenoptischen Eigenschaften (z.B. Minimierung der Halo-Bildung).
- Analytische Methode: Suche nach Invarianten, also nach fundamentalen Charakteristiken des Systems.
- Benötigt ist: systematische Vorgehensweise zum Herausarbeiten der Invarianten *explizit zeitabhängiger* Systeme.
- Im „erweiterten Phasenraum“ lassen sich explizit zeitabhängige Systeme *formal* wie zeitunabhängige beschreiben.

Übersicht

- Das Prinzip der kleinsten Wirkung
- Die Erweiterung des Prinzips
- Die parametrisierte Form der Euler-Lagrange-Gleichungen
- Das Noether-Theorem
- Beispiel: Invariante des n -dimensionalen isotropen zeitabhängigen harmonischen Oszillators
- Zusammenfassung und Ausblick

Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Gegeben: dynamisches System mit n Freiheitsgraden.
Ein *Weg* γ im n -dimensionalen Konfigurationsraum mit der Zeit t als unabhängigem Parameter ist definiert durch

$$\gamma = \{(\vec{q}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{q} = \vec{q}(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$$

\vec{q} ist der n -dimensionale Vektor der generalisierten Ortskoordinaten.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Gegeben: dynamisches System mit n Freiheitsgraden.
Ein *Weg* γ im n -dimensionalen Konfigurationsraum mit der Zeit t als unabhängigem Parameter ist definiert durch

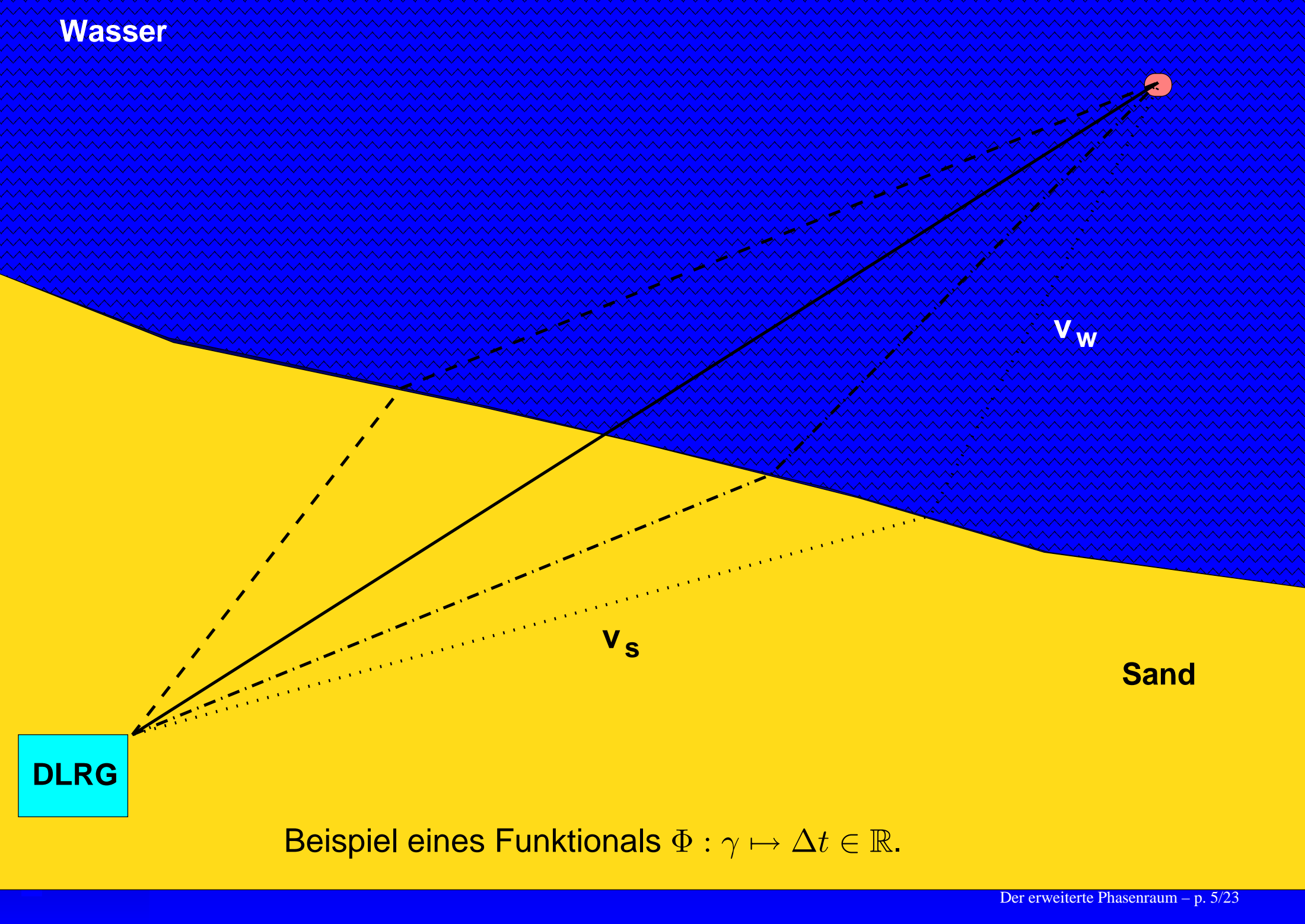
$$\gamma = \{ (\vec{q}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{q} = \vec{q}(t), t_0 \leq t \leq t_1 \}$$

\vec{q} ist der n -dimensionale Vektor der generalisierten Ortskoordinaten. Wir definieren ein *Funktional* Φ als eine Abbildung der Menge der Wege γ in die reellen Zahlen \mathbb{R}

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) dt$$

Die Funktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne die Lagrange-funktion.

Wasser



DLRG

v_w

v_s

Sand

Beispiel eines Funktional $\Phi : \gamma \mapsto \Delta t \in \mathbb{R}$.

- Prinzip der kleinsten Wirkung (Leibnitz, Maupertuis, Euler, Lagrange): ein reales System „wählt“ genau den Weg γ_{ext} , bei welchem $\Phi(\gamma_{\text{ext}})$ ein Extremum (i.a. ein Minimum) annimmt.

- Prinzip der kleinsten Wirkung (Leibnitz, Maupertuis, Euler, Lagrange): ein reales System „wählt“ genau den Weg γ_{ext} , bei welchem $\Phi(\gamma_{\text{ext}})$ ein Extremum (i.a. ein Minimum) annimmt.
- Im Bild unseres Rettungsschwimmers geht ein System also immer genau den *optimalen* Weg.

- Prinzip der kleinsten Wirkung (Leibnitz, Maupertuis, Euler, Lagrange): ein reales System „wählt“ genau den Weg γ_{ext} , bei welchem $\Phi(\gamma_{\text{ext}})$ ein Extremum (i.a. ein Minimum) annimmt.
- Im Bild unseres Rettungsschwimmers geht ein System also immer genau den *optimalen* Weg.
- \rightsquigarrow Philosophische Betrachtung: gibt es ein zweckbestimmtes Verhalten der Natur? Das Prinzip gilt ganz allgemein für alle *reversiblen* Vorgänge der Physik!

- Prinzip der kleinsten Wirkung (Leibnitz, Maupertuis, Euler, Lagrange): ein reales System „wählt“ genau den Weg γ_{ext} , bei welchem $\Phi(\gamma_{\text{ext}})$ ein Extremum (i.a. ein Minimum) annimmt.
- Im Bild unseres Rettungsschwimmers geht ein System also immer genau den *optimalen* Weg.
- \rightsquigarrow Philosophische Betrachtung: gibt es ein zweckbestimmtes Verhalten der Natur? Das Prinzip gilt ganz allgemein für alle *reversiblen* Vorgänge der Physik!
- Die Variation des Funktionals Φ verschwindet genau dann ($\delta\Phi = 0$), wenn $\vec{q}(t)$ die Gleichung erfüllt

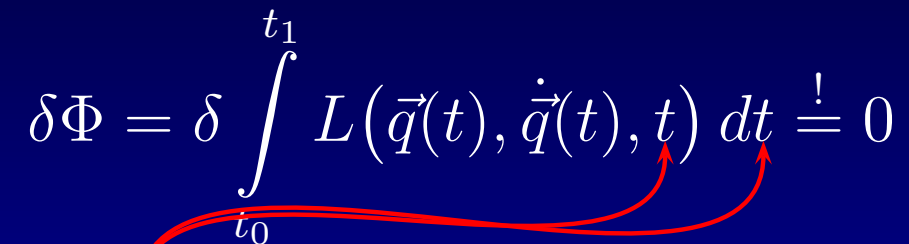
$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = 0.$$

Anwendung des Prinzips auf explizit zeitabhängige Lagrangefunktionen $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$:

$$\delta\Phi = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

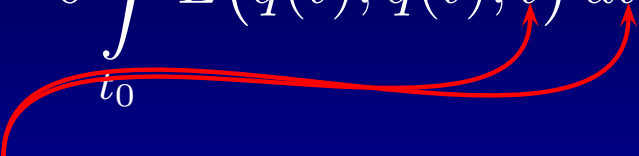
Wir sehen: die Zeit t spielt sowohl die Rolle der Integrationsvariablen, als auch die Rolle eines externen Parameters.

Anwendung des Prinzips auf explizit zeitabhängige
Lagrangefunktionen $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$:

$$\delta\Phi = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt \stackrel{!}{=} 0$$
The equation shows the variation of the action $\delta\Phi$ as a variation of the integral of the Lagrangian L over time. The Lagrangian L is a function of the generalized coordinates $\vec{q}(t)$, their time derivatives $\dot{\vec{q}}(t)$, and time t . The integral is taken from t_0 to t_1 . Red arrows point from the t in the Lagrangian to the t in the differential dt and to the t in the text below. A red circle highlights the t in the text below.

Wir sehen: die **Zeit t** spielt sowohl die Rolle der
Integrationsvariablen, als auch die Rolle eines externen
Parameters.

Anwendung des Prinzips auf explizit zeitabhängige Lagrangefunktionen $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$:

$$\delta\Phi = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt \stackrel{!}{=} 0$$


Wir sehen: die **Zeit t** spielt sowohl die Rolle der Integrationsvariablen, als auch die Rolle eines externen Parameters.

Bei der Berechnung der Variation $\delta\Phi$ wird die Zeit t *nicht* mitvariiert.

~> Nicht die allgemeinste Form der Variation!

Die allgemeinste Form des Variationsproblems erhält man gemäß Substitutionsregel mit s als neuer unabhängiger Variabler

$$\Phi(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1} \left[L(\vec{q}(s), \frac{d\vec{q}}{ds}, t(s)) \frac{dt}{ds} \right] ds$$

Die allgemeinste Form des Variationsproblems erhält man gemäß Substitutionsregel mit s als neuer unabhängiger Variabler

$$\Phi(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1} \left[L(\vec{q}(s), \frac{d\vec{q}/ds}{dt/ds}, t(s)) \frac{dt}{ds} \right] ds$$

Wir definieren nun den „erweiterten Konfigurationsvektor“ \vec{q}_1 und die „erweiterte Lagrangefunktion“ L_1 :

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{q}'_1 = \frac{d\vec{q}_1}{ds}, \quad \left[\text{d.h.: } t'(s) = \frac{dt}{ds} \right],$$

$$L_1(\vec{q}_1, \vec{q}'_1) = L_1(\vec{q}, t, \vec{q}', t') = L\left(\vec{q}, \frac{d\vec{q}/ds}{dt/ds}, t\right) \frac{dt}{ds}.$$

Die allgemeinste Form des Variationsproblems erhält man gemäß Substitutionsregel mit s als neuer unabhängiger Variabler

$$\Phi(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1} \left[L\left(\vec{q}(s), \frac{d\vec{q}/ds}{dt/ds}, t(s)\right) \frac{dt}{ds} \right] ds$$

Wir definieren nun den „erweiterten Konfigurationsvektor“ \vec{q}_1 und die „erweiterte Lagrangefunktion“ L_1 :

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{q}'_1 = \frac{d\vec{q}_1}{ds}, \quad \left[\text{d.h.: } t'(s) = \frac{dt}{ds} \right],$$

$$L_1(\vec{q}_1, \vec{q}'_1) = L_1(\vec{q}, t, \vec{q}', t') = L\left(\vec{q}, \frac{d\vec{q}/ds}{dt/ds}, t\right) \frac{dt}{ds}.$$

Mit dem Weg γ_1 im $n + 1$ -dimensionalen erweiterten Konfigurationsraum

$$\gamma_1 = \{(\vec{q}_1, s) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \vec{q}_1 = \vec{q}_1(s), s_0 \leq s \leq s_1\}$$

erhalten wir als Funktional $\Phi_1(\gamma_1)$

$$\Phi_1(\gamma_1) = \int_{s_0}^{s_1} L_1(\vec{q}_1(s), \vec{q}'_1(s)) ds$$

Mit dem Weg γ_1 im $n + 1$ -dimensionalen erweiterten Konfigurationsraum

$$\gamma_1 = \{(\vec{q}_1, s) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \vec{q}_1 = \vec{q}_1(s), s_0 \leq s \leq s_1\}$$

erhalten wir als Funktional $\Phi_1(\gamma_1)$

$$\Phi_1(\gamma_1) = \int_{s_0}^{s_1} L_1(\vec{q}_1(s), \vec{q}'_1(s)) ds$$

Wir sehen: das Funktional $\Phi_1(\gamma_1)$ stimmt in der Form *genau* mit dem ursprünglichen Funktional $\Phi(\gamma)$ überein.

Mit dem Weg γ_1 im $n + 1$ -dimensionalen erweiterten Konfigurationsraum

$$\gamma_1 = \{(\vec{q}_1, s) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \vec{q}_1 = \vec{q}_1(s), s_0 \leq s \leq s_1\}$$

erhalten wir als Funktional $\Phi_1(\gamma_1)$

$$\Phi_1(\gamma_1) = \int_{s_0}^{s_1} L_1(\vec{q}_1(s), \vec{q}'_1(s)) ds$$

Wir sehen: das Funktional $\Phi_1(\gamma_1)$ stimmt in der Form *genau* mit dem ursprünglichen Funktional $\Phi(\gamma)$ überein.

Die Variation des Funktionals $\Phi_1(\gamma_1)$ verschwindet wiederum genau dann, wenn $\vec{q}_1(s)$ die Gleichung erfüllt

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}_1} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'_1} \right) = 0.$$

Die Berechnung der partiellen Ableitungen von L_1 liefert den Zusammenhang mit den gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}} = t'(s) \frac{\partial L}{\partial \vec{q}},$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}},$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} = t'(s) \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial t'} = L - \dot{\vec{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}$$

Die Berechnung der partiellen Ableitungen von L_1 liefert den Zusammenhang mit den gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}} &= t'(s) \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}, & \frac{\partial L_1}{\partial t} &= t'(s) \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}, & \frac{\partial L_1}{\partial t'} &= L - \dot{\vec{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \end{aligned}$$

Einsetzen in die „erweiterten“ E-L-Gleichungen ergibt:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'} \right) = 0 \iff t'(s) \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L_1}{\partial t'} \right) = 0 \iff \vec{q}'(s) \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \right] = 0$$

- Wir sehen: es entstehen jeweils die gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen.

- Wir sehen: es entstehen jeweils die gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen.
- Durch die Erweiterung des Raums entsteht *keine* neue Bewegungsgleichung für $t = t(s)$.

- Wir sehen: es entstehen jeweils die gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen.
- Durch die Erweiterung des Raums entsteht *keine* neue Bewegungsgleichung für $t = t(s)$.
- Die Parametrisierung der Zeit $t = t(s)$ kann passend gewählt werden. D.h., wir haben *einen* Wunsch frei!

- Wir sehen: es entstehen jeweils die gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen.
- Durch die Erweiterung des Raums entsteht *keine* neue Bewegungsgleichung für $t = t(s)$.
- Die Parametrisierung der Zeit $t = t(s)$ kann passend gewählt werden. D.h., wir haben *einen* Wunsch frei!
- Beispiel 1: es ist möglich, ein explizit zeitabhängiges System als zeitunabhängiges umzuformulieren.

- Wir sehen: es entstehen jeweils die gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen.
- Durch die Erweiterung des Raums entsteht *keine* neue Bewegungsgleichung für $t = t(s)$.
- Die Parametrisierung der Zeit $t = t(s)$ kann passend gewählt werden. D.h., wir haben *einen* Wunsch frei!
- Beispiel 1: es ist möglich, ein explizit zeitabhängiges System als zeitunabhängiges umzuformulieren.
- Beispiel 2: ein gebundenes Einzelteilchen kann als freies Teilchen beschrieben werden.

- Wir sehen: es entstehen jeweils die gewöhnlichen Euler-Lagrange-Gleichungen.
- Durch die Erweiterung des Raums entsteht *keine* neue Bewegungsgleichung für $t = t(s)$.
- Die Parametrisierung der Zeit $t = t(s)$ kann passend gewählt werden. D.h., wir haben *einen* Wunsch frei!
- Beispiel 1: es ist möglich, ein explizit zeitabhängiges System als zeitunabhängiges umzuformulieren.
- Beispiel 2: ein gebundenes Einzelteilchen kann als freies Teilchen beschrieben werden.
- Beispiel 3: Eine Aussage für ein zeitunabhängiges Lagrangesystem $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ gilt analog als Aussage für $L_1(\vec{q}_1, \dot{\vec{q}}_1)$. Diese läßt sich für $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ „übersetzen“.

Das Noether-Theorem

liefert: Zusammenhang von Symmetrien und Invarianten.
Wir kehren zurück zu einer zeitunabhängigen Lagrange-
funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$. Gegeben sei eine von einem Parameter ϵ
abhängige Transformationsvorschrift der Ortskoordinaten

$$\vec{h}^\epsilon : \vec{q}(t) \mapsto \vec{Q}(t) .$$

(Beispiel: Drehung im Ortsraum um einen Winkel ϵ .)

Das Noether-Theorem

liefert: Zusammenhang von Symmetrien und Invarianten.
Wir kehren zurück zu einer zeitunabhängigen Lagrange-
funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$. Gegeben sei eine von einem Parameter ϵ
abhängige Transformationsvorschrift der Ortskoordinaten

$$\vec{h}^\epsilon : \vec{q}(t) \mapsto \vec{Q}(t).$$

(Beispiel: Drehung im Ortsraum um einen Winkel ϵ .)

Die transformierten Geschwindigkeiten $\dot{\vec{Q}}(t)$ folgen dann

$$\dot{\vec{Q}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{h}^\epsilon(\vec{q}(t)).$$

Im Lagrange-Formalismus ($L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$) kann dieser
einfache Zusammenhang genutzt werden.

Das Noether-Theorem lautet nun: Erhält \vec{h}^ϵ die Lagrange-funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ (bis auf die totale Zeitableitung einer Funktion $f(\vec{q})$), dann ist

$$I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d\vec{h}^\epsilon(\vec{q})}{d\epsilon} \Bigg|_{\epsilon=0} + f(\vec{q})$$

eine Konstante der Bewegung.

Das Noether-Theorem lautet nun: Erhält \vec{h}^ϵ die Lagrange-funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ (bis auf die totale Zeitableitung einer Funktion $f(\vec{q})$), dann ist

$$I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d\vec{h}^\epsilon(\vec{q})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + f(\vec{q})$$

eine Konstante der Bewegung.

Der Beweis ist einfach. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{dL(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}})}{d\epsilon} + \frac{df(\vec{Q})}{dt} = 0$$

Schreiben wir $dL/d\epsilon$ ausführlich, setzen die Euler-Lagrange-Gleichungen ein und vollziehen den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$, so entsteht sofort die totale Zeitableitung des obigen Ausdrucks.

Im „erweiterten Phasenraum“ heißt dies formal

$$I(\vec{q}_1, \vec{q}'_1) = \frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'_1} \frac{d\vec{h}_1^\epsilon(\vec{q}_1)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + f(\vec{q}_1) = \text{const.}$$

Im „erweiterten Phasenraum“ heißt dies formal

$$I(\vec{q}_1, \vec{q}'_1) = \left. \frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'_1} \frac{d\vec{h}_1^\epsilon(\vec{q}_1)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + f(\vec{q}_1) = \text{const.}$$

Mit der „gewöhnlichen“ Lagrangefunktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ ergibt das

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'_1} = \begin{cases} \partial L / \partial \dot{\vec{q}} = \vec{p}, & i = 1, \dots, n \\ L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \dot{\vec{q}} \vec{p} = -H(\vec{q}, \vec{p}, t), & i = n + 1. \end{cases}$$

Im „erweiterten Phasenraum“ heißt dies formal

$$I(\vec{q}_1, \vec{q}'_1) = \left. \frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'_1} \frac{d\vec{h}_1^\epsilon(\vec{q}_1)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + f(\vec{q}_1) = \text{const.}$$

Mit der „gewöhnlichen“ Lagrangefunktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ ergibt das

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{q}'_1} = \begin{cases} \partial L / \partial \dot{\vec{q}} = \vec{p}, & i = 1, \dots, n \\ L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \dot{\vec{q}} \vec{p} = -H(\vec{q}, \vec{p}, t), & i = n + 1. \end{cases}$$

In der Hamilton-Darstellung lautet somit die Noether-Invariante für explizit zeitabhängige Systeme

$$I(\vec{q}, \vec{p}, t) = \left. \vec{p} \frac{d\vec{h}^\epsilon(\vec{q}, t)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} - H \left. \frac{dh_t^\epsilon(t)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + f(\vec{q}, t).$$

Die Transformationsregeln lassen sich infinitesimal in ϵ schreiben:

$$\vec{Q} = \vec{h}^\epsilon(\vec{q}, t) = \vec{q} - \epsilon \vec{\eta}(\vec{q}, t), \quad T = h_t^\epsilon(t) = t - \epsilon \xi(t).$$

Die Transformationsregeln lassen sich infinitesimal in ϵ schreiben:

$$\vec{Q} = \vec{h}^\epsilon(\vec{q}, t) = \vec{q} - \epsilon \vec{\eta}(\vec{q}, t), \quad T = h_t^\epsilon(t) = t - \epsilon \xi(t).$$

Ändern diese Transformationen die E-L-Gleichungen nicht

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{Q}} - \frac{d}{dT} \left(\frac{\partial L}{\partial (d\vec{Q}/dT)} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = 0,$$

d.h. gilt

$$L(\vec{Q}, d\vec{Q}/dT, T) dT = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt + df(\vec{q}, t),$$

Die Transformationsregeln lassen sich infinitesimal in ϵ schreiben:

$$\vec{Q} = \vec{h}^\epsilon(\vec{q}, t) = \vec{q} - \epsilon \vec{\eta}(\vec{q}, t), \quad T = h_t^\epsilon(t) = t - \epsilon \xi(t).$$

Ändern diese Transformationen die E-L-Gleichungen nicht

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{Q}} - \frac{d}{dT} \left(\frac{\partial L}{\partial (d\vec{Q}/dT)} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = 0,$$

d.h. gilt

$$L(\vec{Q}, d\vec{Q}/dT, T) dT = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt + df(\vec{q}, t),$$

so ist die Funktion

$$I = \xi(t) H(\vec{q}, \vec{p}, t) - \vec{\eta}(\vec{q}, t) \vec{p} + f(\vec{q}, t)$$

ein (zumindest lokales) Integral der Bewegung: $dI/dt = 0$.

Für eine gegebene Lagrange-funktion L (bzw. Hamilton-funktion H) sind die Transformationsregeln, welche die E-L Gleichungen erhalten und somit die Invariante I liefern, natürlich zunächst unbekannt.

Für eine gegebene Lagrangefunktion L (bzw. Hamiltonfunktion H) sind die Transformationsregeln, welche die E-L Gleichungen erhalten und somit die Invariante I liefern, natürlich zunächst unbekannt.

In der Praxis stellt sich das Problem i.a. also umgekehrt: wir *fordern* $dI/dt = 0$ und bestimmen die Koeffizienten $\xi(t)$, $\vec{\eta}(\vec{q}, t)$ und $f(\vec{q}, t)$ der Symmetrietransformation.

Für eine gegebene Lagrange-funktion L (bzw. Hamilton-funktion H) sind die Transformationsregeln, welche die E-L Gleichungen erhalten und somit die Invariante I liefern, natürlich zunächst unbekannt.

In der Praxis stellt sich das Problem i.a. also umgekehrt: wir *fordern* $dI/dt = 0$ und bestimmen die Koeffizienten $\xi(t)$, $\vec{\eta}(\vec{q}, t)$ und $f(\vec{q}, t)$ der Symmetrietransformation.

~> Konstruktives Verfahren zu Bestimmung von Invarianten $I(\vec{q}, \vec{p}, t)$ eines gegebenen Hamiltonsystems $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$.

Für eine gegebene Lagrangefunktion L (bzw. Hamiltonfunktion H) sind die Transformationsregeln, welche die E-L Gleichungen erhalten und somit die Invariante I liefern, natürlich zunächst unbekannt.

In der Praxis stellt sich das Problem i.a. also umgekehrt: wir fordern $dI/dt = 0$ und bestimmen die Koeffizienten $\xi(t)$, $\vec{\eta}(\vec{q}, t)$ und $f(\vec{q}, t)$ der Symmetrietransformation.

~> Konstruktives Verfahren zu Bestimmung von Invarianten $I(\vec{q}, \vec{p}, t)$ eines gegebenen Hamiltonsystems $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$.

Das Problem der Bestimmung der Invarianten eines gegebenen Systems erscheint als Aufgabe, die Lösungen einer Differentialgleichung zu finden.

Wir unterscheiden die folgenden Grundtypen von Invarianten:

- *Globale* Invarianten, welche sich direkt durch die kanonischen Variablen darstellen lassen (z.B. Energie als Funktionswert der Hamiltonfunktion im Falle eines autonomen Hamiltonsystems).

Wir unterscheiden die folgenden Grundtypen von Invarianten:

- *Globale* Invarianten, welche sich direkt durch die kanonischen Variablen darstellen lassen (z.B. Energie als Funktionswert der Hamiltonfunktion im Falle eines autonomen Hamiltonsystems).
- *Lokale* Invarianten, welche sich nur nach Lösung der Bewegungsgleichungen durch Integration von „Hilfsgleichungen“ darstellen lassen. Diese reduzieren somit *nicht* die Ordnung des Systems.

Wir unterscheiden die folgenden Grundtypen von Invarianten:

- *Globale* Invarianten, welche sich direkt durch die kanonischen Variablen darstellen lassen (z.B. Energie als Funktionswert der Hamiltonfunktion im Falle eines autonomen Hamiltonsystems).
- *Lokale* Invarianten, welche sich nur nach Lösung der Bewegungsgleichungen durch Integration von „Hilfsgleichungen“ darstellen lassen. Diese reduzieren somit *nicht* die Ordnung des Systems.
- Besitzt die Hilfsgleichung einer lokalen Invarianten eine allgemeine Lösung in \vec{q}, \vec{p} , so wird die lokale Invariante zur globalen.

n -dim. zeitabh. harm. Oszillator

Als einfaches Beispiel zur Bestimmung der Invarianten eines explizit zeitabhängigen Hamiltonsystems betrachten wir

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + V(\vec{q}, t), \quad V(\vec{q}, t) = \frac{1}{2} \omega^2(t) \sum_{i=1}^n q_i^2$$

n -dim. zeitabh. harm. Oszillator

Als einfaches Beispiel zur Bestimmung der Invarianten eines explizit zeitabhängigen Hamiltonsystems betrachten wir

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + V(\vec{q}, t), \quad V(\vec{q}, t) = \frac{1}{2} \omega^2(t) \sum_{i=1}^n q_i^2$$

Die Forderung $dI/dt \stackrel{!}{=} 0$ führt dann auf die Hierarchie

$$p^2 : \quad \sum_i \sum_j p_i p_j \left(\frac{1}{2} \dot{\xi} \delta_{ij} - \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \right) = 0,$$

$$p^1 : \quad \sum_i p_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial \eta_i}{\partial t} \right) = 0,$$

$$p^0 : \quad \sum_i \left[q_i^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\xi} \omega^2(t) + \xi \omega \dot{\omega} \right) + q_i \eta_i \omega^2 \right] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Die Gleichungen haben die expliziten Lösungen

$$\eta_i(\vec{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{\xi}(t) q_i, \quad f(\vec{q}, t) = \ddot{\xi}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} q_i^2,$$

Die Gleichungen haben die expliziten Lösungen

$$\eta_i(\vec{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{\xi}(t) q_i, \quad f(\vec{q}, t) = \ddot{\xi}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{4}q_i^2,$$

und somit die Invariante die Darstellung

$$I(\vec{q}, \vec{p}, t) = \xi(t) H(\vec{q}, \vec{p}, t) - \dot{\xi}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}q_i p_i + \ddot{\xi}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{4}q_i^2,$$

mit der linearen „Hilfsgleichung“ für $\xi(t)$

$$\frac{1}{4}\ddot{\xi} + \dot{\xi}\omega^2(t) + \xi\omega\dot{\omega} = 0.$$

Die Gleichungen haben die expliziten Lösungen

$$\eta_i(\vec{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{\xi}(t) q_i, \quad f(\vec{q}, t) = \ddot{\xi}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{4}q_i^2,$$

und somit die Invariante die Darstellung

$$I(\vec{q}, \vec{p}, t) = \xi(t) H(\vec{q}, \vec{p}, t) - \dot{\xi}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}q_i p_i + \ddot{\xi}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{4}q_i^2,$$

mit der linearen „Hilfsgleichung“ für $\xi(t)$

$$\frac{1}{4}\ddot{\xi} + \dot{\xi}\omega^2(t) + \xi\omega\dot{\omega} = 0.$$

Wie sich direkt zeigen läßt, besitzt diese Gleichung die Lösung

$$\xi(t) = \sum_i q_i^2(t),$$

sofern alle q_i Lösungen der Bewegungsgleichungen sind.

Da die Hilfsgleichung für $\xi(t)$ nicht von den \vec{q} abhängt und eine allgemeine Lösung besitzt, hat die Invariante die *globale* Darstellung

$$I(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_i q_i^2 \sum_i p_i^2 - \left(\sum_i q_i p_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (q_i p_j - q_j p_i)^2 .$$

Wir sehen: die Invariante hat die Form der *rms-Emittanz*.

↪ Die *rms-Emittanz* ist eine globale Invariante des n -dimensionalen zeitabh. isotropen harmonischen Oszillators.

Da die Hilfsgleichung für $\xi(t)$ nicht von den \vec{q} abhängt und eine allgemeine Lösung besitzt, hat die Invariante die *globale* Darstellung

$$I(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_i q_i^2 \sum_i p_i^2 - \left(\sum_i q_i p_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (q_i p_j - q_j p_i)^2 .$$

Wir sehen: die Invariante hat die Form der *rms-Emittanz*.

~> Die *rms-Emittanz* ist eine globale Invariante des n -dimensionalen zeitabh. isotropen harmonischen Oszillators.

Die zugehörige Zeittransformation $t = T + \epsilon \xi(t) + \dots$ ergibt

$$\xi(t) = \frac{dt}{dT} \quad \Rightarrow \quad T(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sum_i q_i^2}$$

Wir sehen: die transformierte Zeit T entspricht dem „Phasenvorschub“, d.h. der Phasenvorschub ist nichts anderes als die Zeit im transformierten (zeitunabhängigen) System.

Zusammenfassung und Ausblick

- Der „Erweiterter Phasenraum“ ermöglicht es, explizit zeitabhängige Hamilton-Lagrange-Systeme formal wie zeitunabhängige zu beschreiben.

Zusammenfassung und Ausblick

- Der „Erweiterter Phasenraum“ ermöglicht es, explizit zeitabhängige Hamilton-Lagrange-Systeme formal wie zeitunabhängige zu beschreiben.
- In dieser Beschreibung können jedem System drei *lokale* Invarianten aus den drei Fundamentallösungen einer „Hilfsgleichung“ dritter Ordnung zugeordnet werden.

Zusammenfassung und Ausblick

- Der „Erweiterter Phasenraum“ ermöglicht es, explizit zeitabhängige Hamilton-Lagrange-Systeme formal wie zeitunabhängige zu beschreiben.
- In dieser Beschreibung können jedem System drei *lokale* Invarianten aus den drei Fundamentallösungen einer „Hilfsgleichung“ dritter Ordnung zugeordnet werden.
- Besitzt diese Dgl. eine analytische Lösung, dann ist die zugehörige Invariante *global*.
~> Suche nach globalen Invarianten reduziert sich auf die Suche nach analytischen Lösungen einer Dgl.

- Nur für wenige Systeme existieren analytische Lösungen. \leadsto Nur wenige zeitabhängige Systeme besitzen eine globale Invariante.

- Nur für wenige Systeme existieren analytische Lösungen. \leadsto Nur wenige zeitabhängige Systeme besitzen eine globale Invariante.
- Aber auch der numerisch berechnete Verlauf der Lösungen $\xi(t)$ der Hilfsgleichung liefert Informationen über die Dynamik des Systems.

- Nur für wenige Systeme existieren analytische Lösungen. \leadsto Nur wenige zeitabhängige Systeme besitzen eine globale Invariante.
- Aber auch der numerisch berechnete Verlauf der Lösungen $\xi(t)$ der Hilfsgleichung liefert Informationen über die Dynamik des Systems.
- Untersuchung: Analyse von Coulomb-Systemen im Hinblick auf die Entstehung von „Halos“.

Veröffentlichungen:

- Phys. Rev. Lett. **85**, 3830 (2000)
- Phys. Rev. E **64**, 026503 (2001)
- Ann. Phys. (Leipzig) **11**, 15 (2002)
- Phys. Rev. E **66**, 066605 (2002)
- Habilitationsschrift (GSI-Report 2002-06)
- Dieser Vortrag ist erhältlich unter
“<http://www.gsi.de/~struck>”